

Leçon 6.1

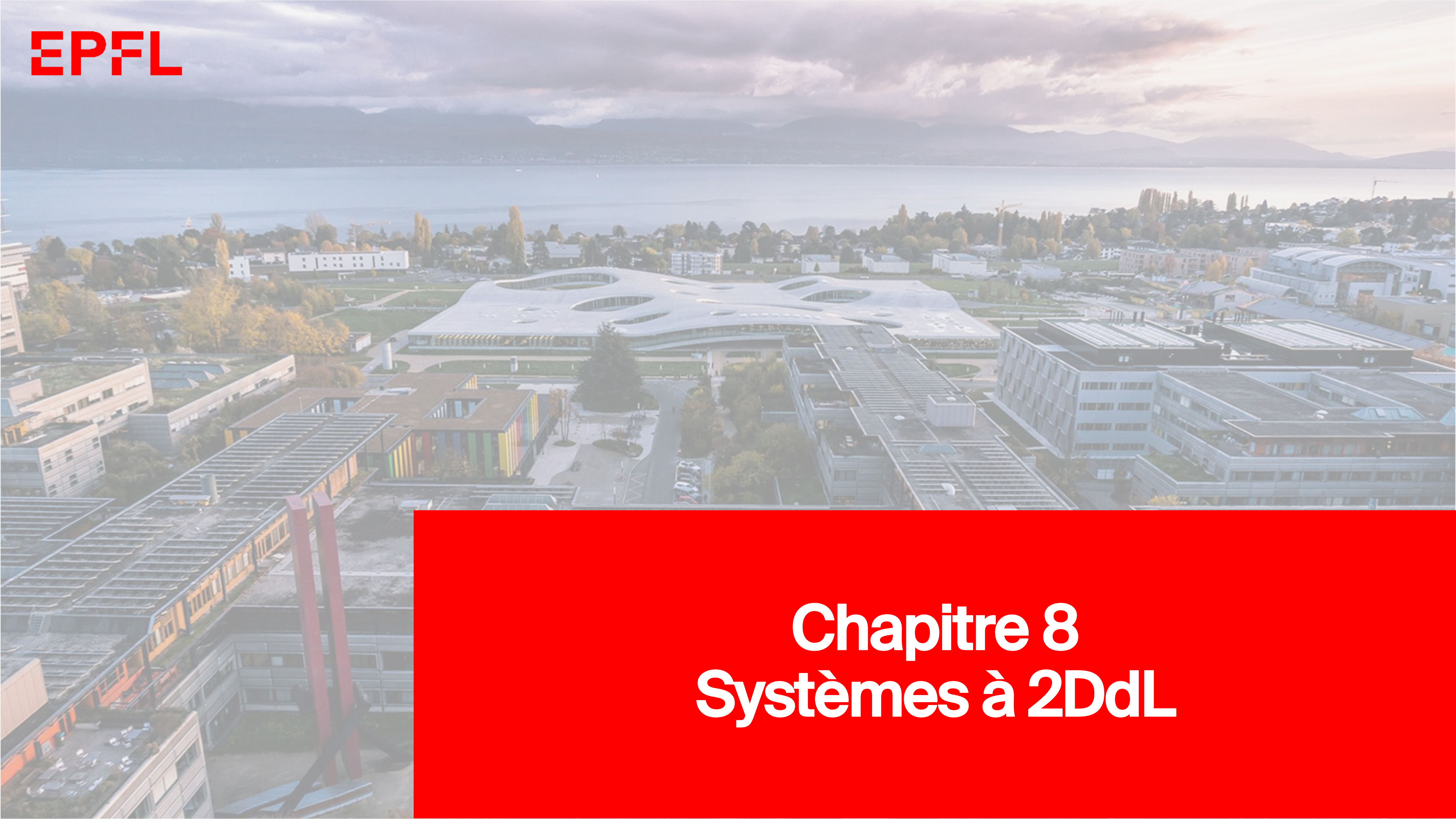
Systemes avec 2DdL

- Libres et Conservatifs -

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Systèmes à 2DdL
- Équations de mouvement
- Régime libre conservatif
- Mode propre
- Systèmes symétriques



Chapitre 8

Systemes à 2DdL

EPFL 2 degrés de liberté – Régime libre

*Coordonnées généralisées d'un système à deux
degrés de liberté*

$$x_1(t) \text{ et } x_2(t)$$

*Forme canonique du régime libre de l'oscillateur
à deux degrés de liberté*

$$m_{11}\ddot{x}_1 + c_{11}\dot{x}_1 + k_{11}x_1$$

$$m_{22}\ddot{x}_2 + c_{22}\dot{x}_2 + k_{22}x_2$$

Termes propres

$$+ m_{12}\ddot{x}_2$$

$$+ m_{21}\ddot{x}_1$$

**Couplage
inertiel**

$$+ c_{12}\dot{x}_2$$

$$+ c_{21}\dot{x}_1$$

**Couplage
résistif ou
visqueuse**

$$+ k_{12}x_2 = 0$$

$$+ k_{21}x_1 = 0$$

**Couplage
élastique**

EPFL 2 degrés de liberté – Régime libre

FORME MATRICIELLE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Forme canonique matricielle du régime libre de l'oscillateur à deux degrés de liberté

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

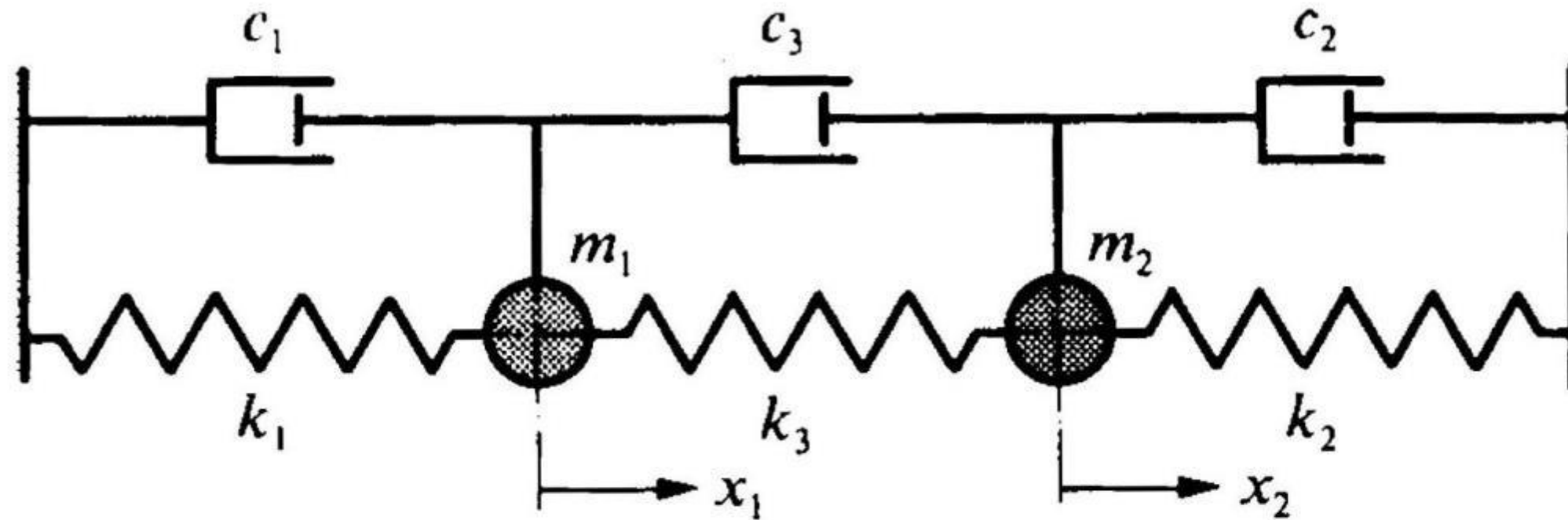
ou en écriture condensée

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [C]\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

$\mathbf{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\mathbf{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\mathbf{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	matrice des masses
$[C]$	matrice d'amortissement
$[K]$	matrice de rigidité

EPFL Régime libre – 2 degrés de liberté

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME SANS COUPLAGE INERTIEL



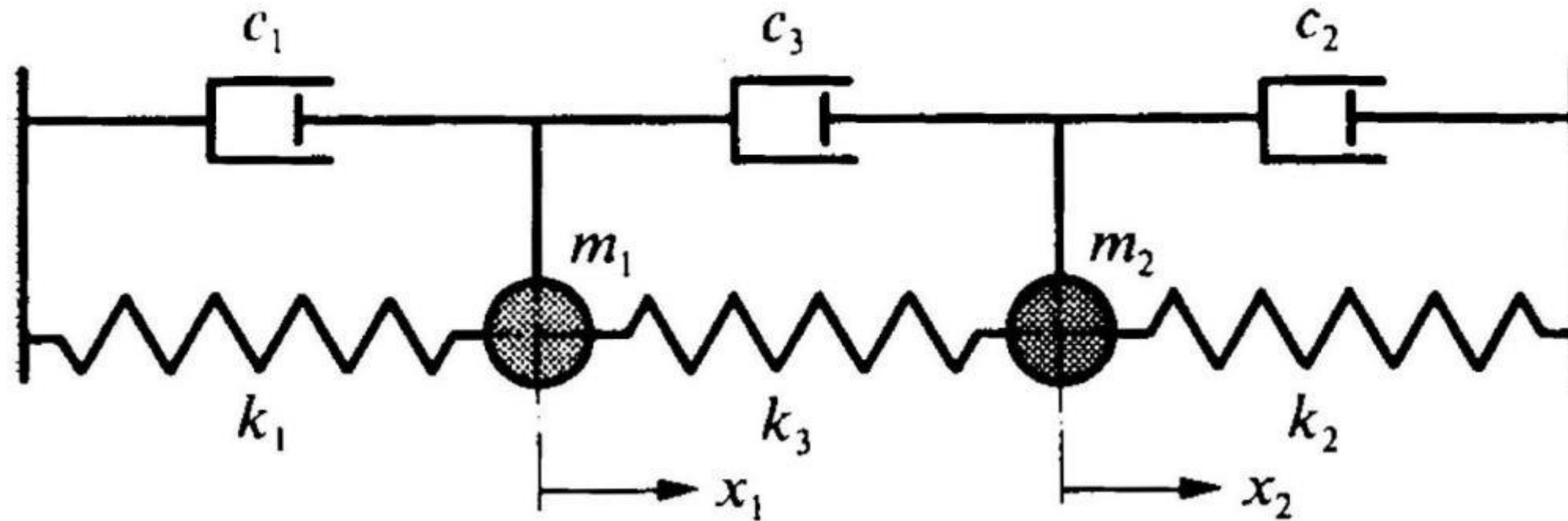
Equations de Newton d'un oscillateur à deux
degrés de liberté sans couplage inertiel

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3 (x_2 - x_1) - c_2 \dot{x}_2 - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

EPFL Régime libre – 2 degrés de liberté

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME SANS COUPLAGE INERTIEL



Régime libre du système (sans couplage inertiel)

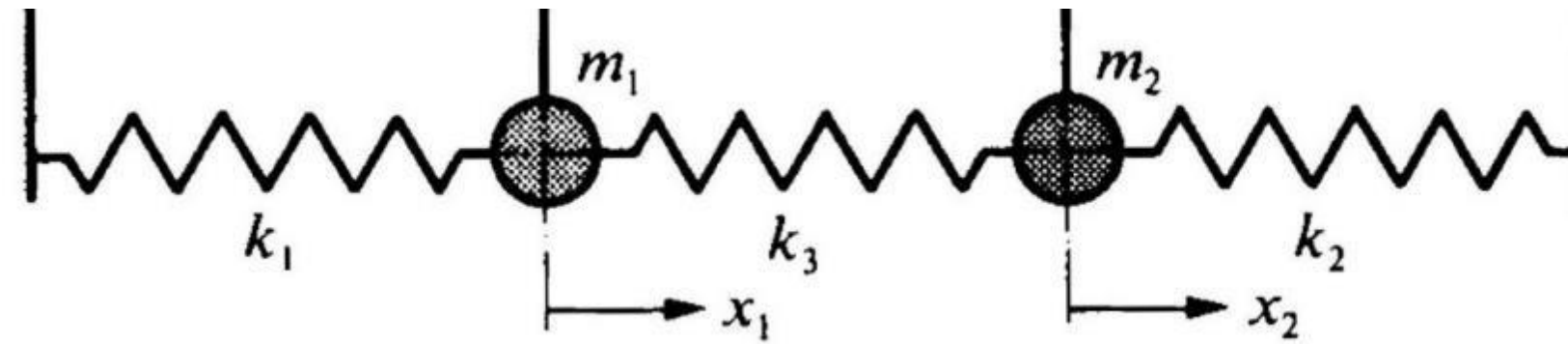
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) \dot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_3 \dot{x}_1 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

Solutions générales du régime libre de la forme

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

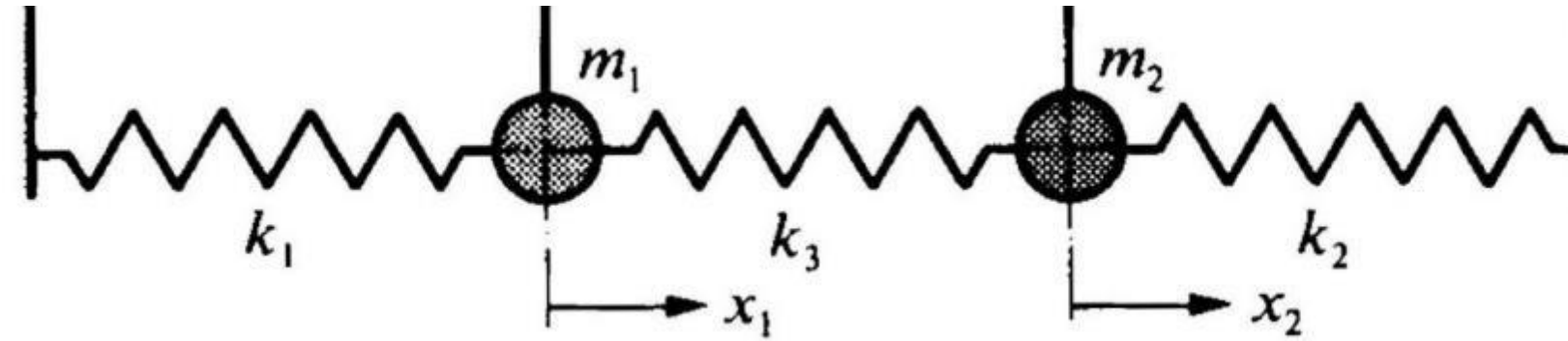
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{pt} \rightarrow \begin{cases} x_1 = A_1 e^{pt} \\ x_2 = A_2 e^{pt} \end{cases}$$

Intégration des solutions générales dans les équations différentielles

$$\mathbf{M}p^2 \mathbf{A}e^{pt} + \mathbf{K}\mathbf{A}e^{pt} = 0 \rightarrow (\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K})\mathbf{A}e^{pt} = 0 \rightarrow (\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K})\mathbf{A} = 0$$

$$\det(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K}) = 0$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{pt} \quad \det(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2 p^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.8)$$

Equation caractéristique ou équation aux pulsations propres

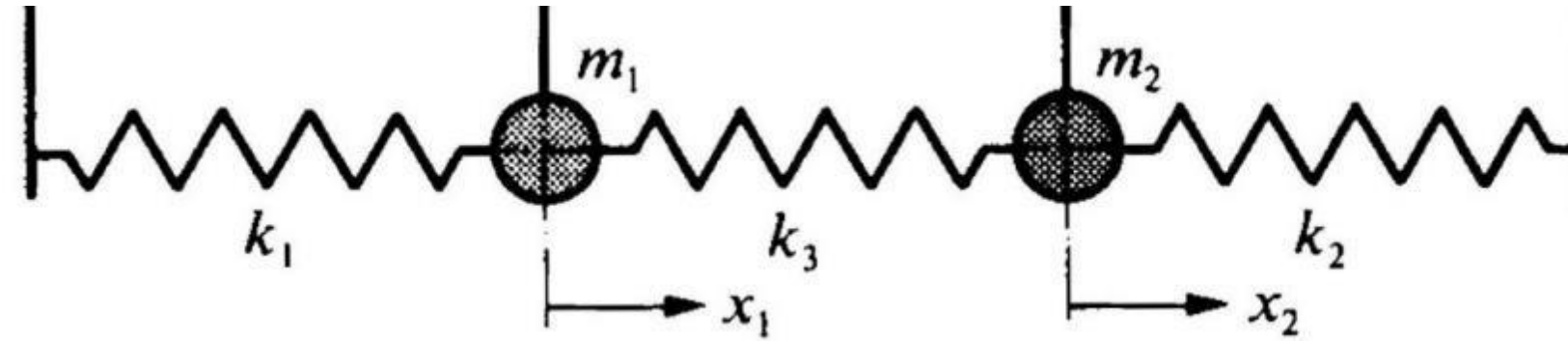
$$p^4 + p^2 \left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_1 m_2} = 0 \quad (8.9)$$

Solutions (imaginaires purs) de l'équation caractéristique

$$p_1 = \pm j\omega_1$$

$$p_2 = \pm j\omega_2$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{pt} \quad \det(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K}) = 0$$

$$p_1 = \pm j\omega_1$$

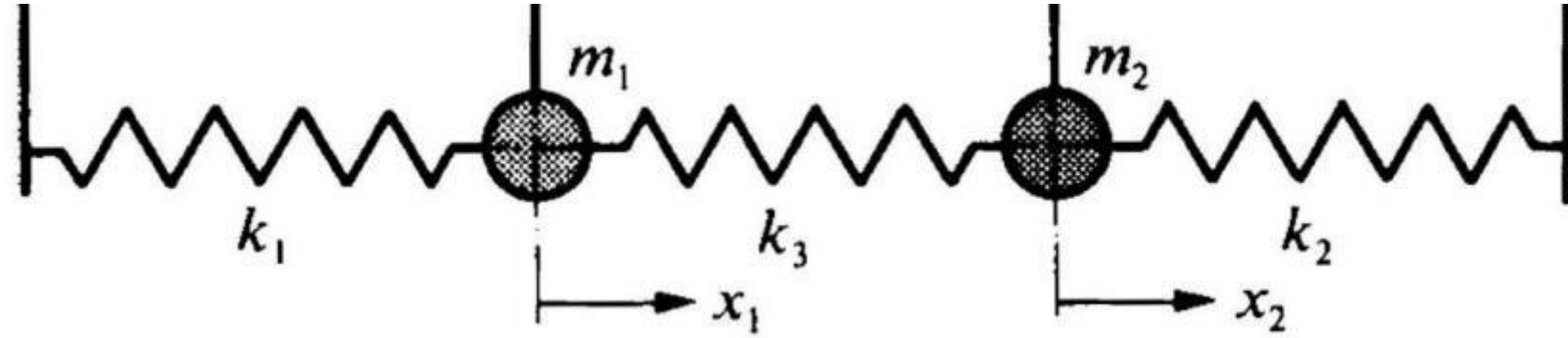
$$p_2 = \pm j\omega_2$$

Amplitudes des solutions du régime libre définies
à un facteur près

$$(\omega_i^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{A}_i = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{bmatrix} X_1 \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{bmatrix} X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= \frac{k_1 + k_3 - m_1 \omega_1^2}{k_3} = \frac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2 \omega_1^2} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \\ \beta_{22} &= \frac{k_1 + k_3 - m_1 \omega_2^2}{k_3} = \frac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2 \omega_2^2} = \frac{A_{22}}{A_{12}} \end{aligned} \quad (8.11)$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



Solutions particulières du régime libre

pour x_1 : $A_{11} e^{j\omega_1 t}$, $A_{11} e^{-j\omega_1 t}$, $A_{12} e^{j\omega_2 t}$, $A_{12} e^{-j\omega_2 t}$

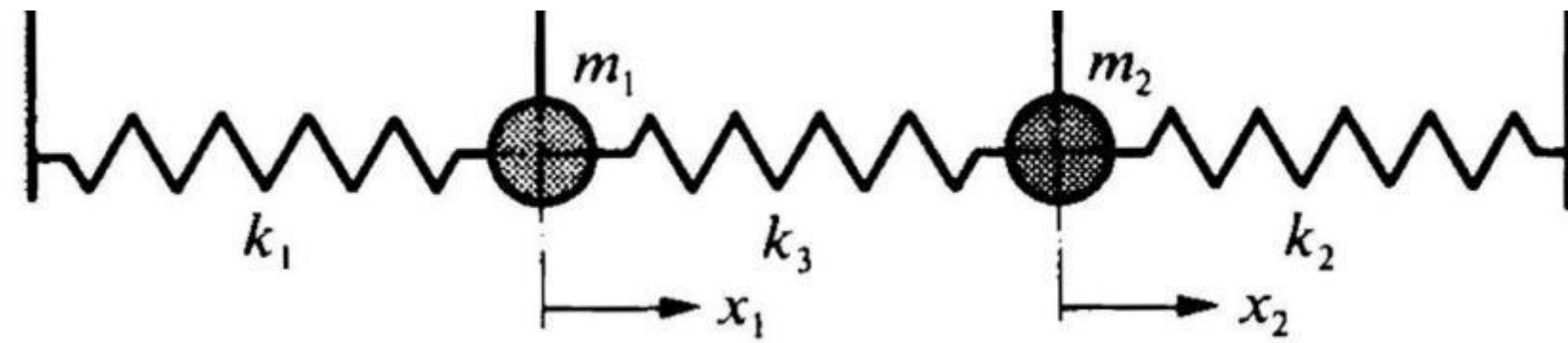
pour x_2 : $A_{21} e^{j\omega_1 t}$, $A_{21} e^{-j\omega_1 t}$, $A_{22} e^{j\omega_2 t}$, $A_{22} e^{-j\omega_2 t}$

Solutions générales du régime libre

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} (C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}) \\ &\quad + A_{12} (C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}) \\ x_2 &= A_{21} (C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}) \\ &\quad + A_{22} (C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Autre forme des solutions générales du régime libre

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 &= \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{aligned} \quad (8.13)$$



NOTION DE MODE PROPRE

Définition du mode propre d'un système

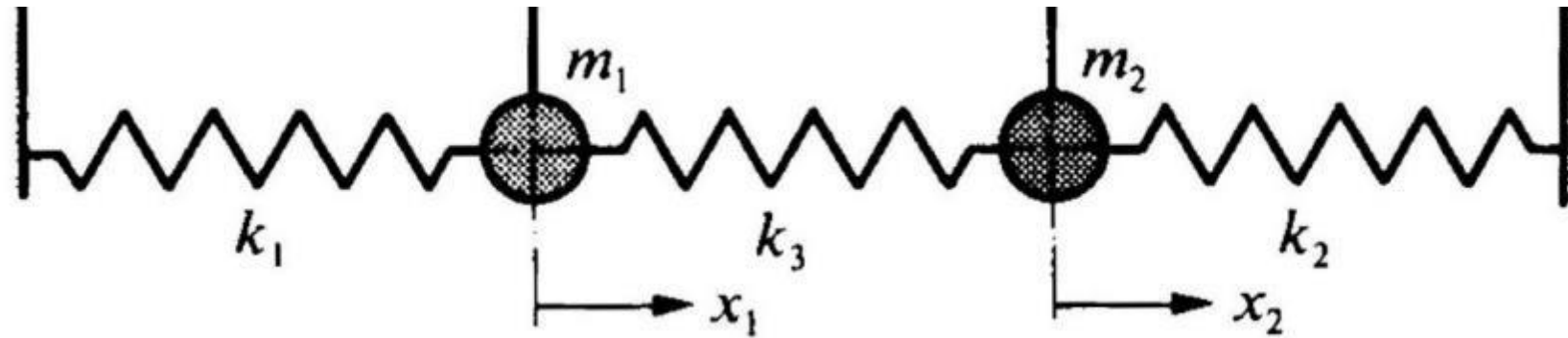
Un *mode propre* est le *mouvement* du système lié à une *pulsation* ou *fréquence propre*.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{bmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{bmatrix} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Forme matricielle des solutions générales du régime libre

$$\mathbf{x} = \underset{\text{1}^{\text{er}} \text{ mode}}{\beta_1} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \underset{\text{2}^{\text{ème}} \text{ mode}}{\beta_2} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ mode} \qquad \text{2}^{\text{ème}} \text{ mode} \quad (8.14)$$



Forme matricielle des solutions générales du régime libre

$$\mathbf{x} = \underbrace{\boldsymbol{\beta}_1}_{\text{1er mode}} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \underbrace{\boldsymbol{\beta}_2}_{\text{2ème mode}} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (8.14)$$

NOTION DE VECTEUR MODAL

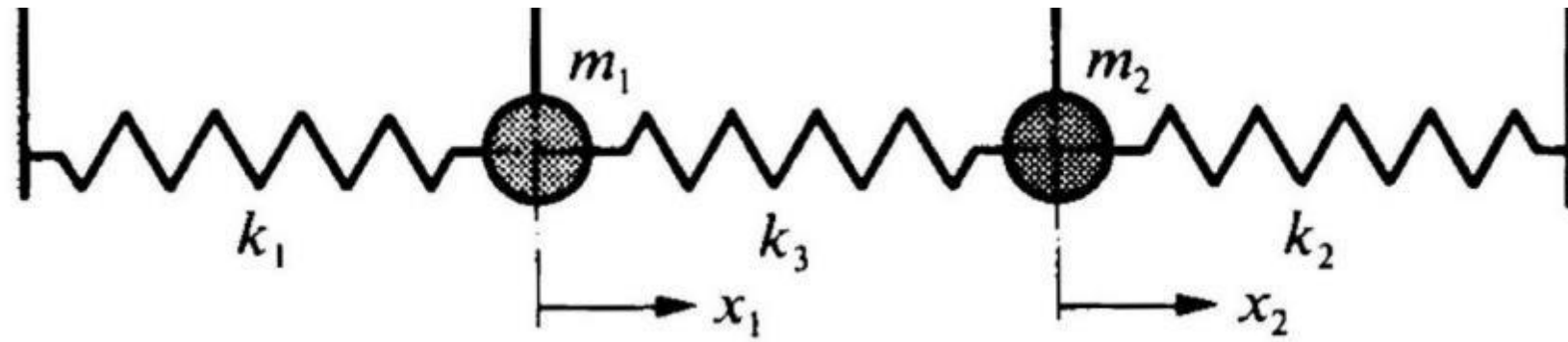
Vecteurs modaux ou vecteurs propres de l'oscillateur

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

Orthogonalité des modes propres de l'oscillateur

$$\boldsymbol{\beta}_1^T [\mathbf{M}] \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \quad \boldsymbol{\beta}_1^T [\mathbf{K}] \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \quad (8.16)$$

EPFL Systèmes symétriques



Equation caractéristique pour des systèmes à symétrie géométrique ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$)

$$p^4 + p^2 \frac{2(k + k_3)}{m} + \frac{k^2 + 2k k_3}{m^2} = 0 \quad (8.18)$$

Solutions de l'équation caractéristique

$$p^2 = -\frac{k + k_3}{m} \pm \frac{k_3}{m} \quad (8.19)$$

Pulsations propres du système symétrique

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_3}{m} \quad (8.20)$$

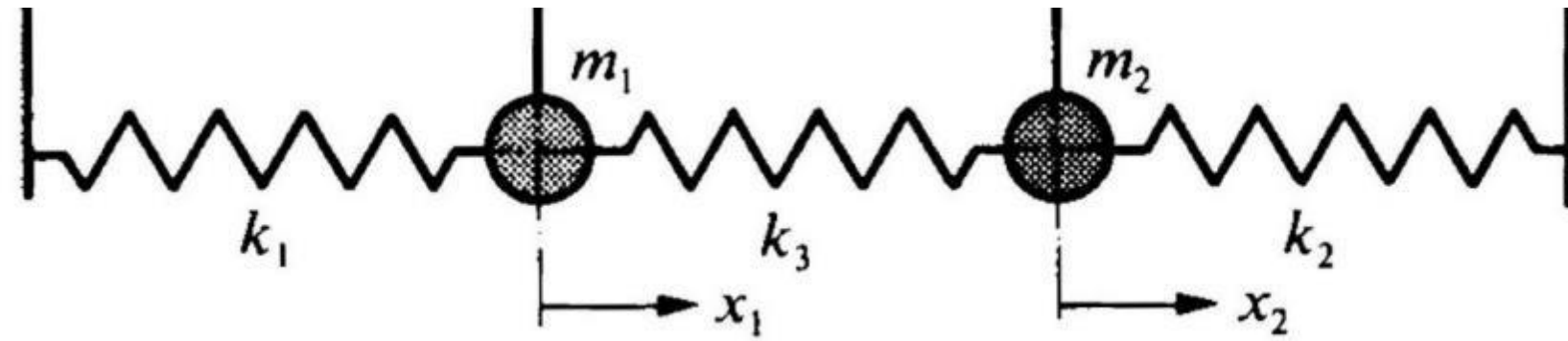
Rapports des amplitudes des solutions pour les deux pulsations propres

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= \frac{k + k_3 - m \omega_1^2}{k_3} = +1 \\ \beta_{22} &= \frac{k + k_3 - m \omega_2^2}{k_3} = -1 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Vecteurs modaux de l'oscillateur symétrique

$$\beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

EPFL Systèmes symétriques



Solutions générales du régime libre du système symétrique

$$x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

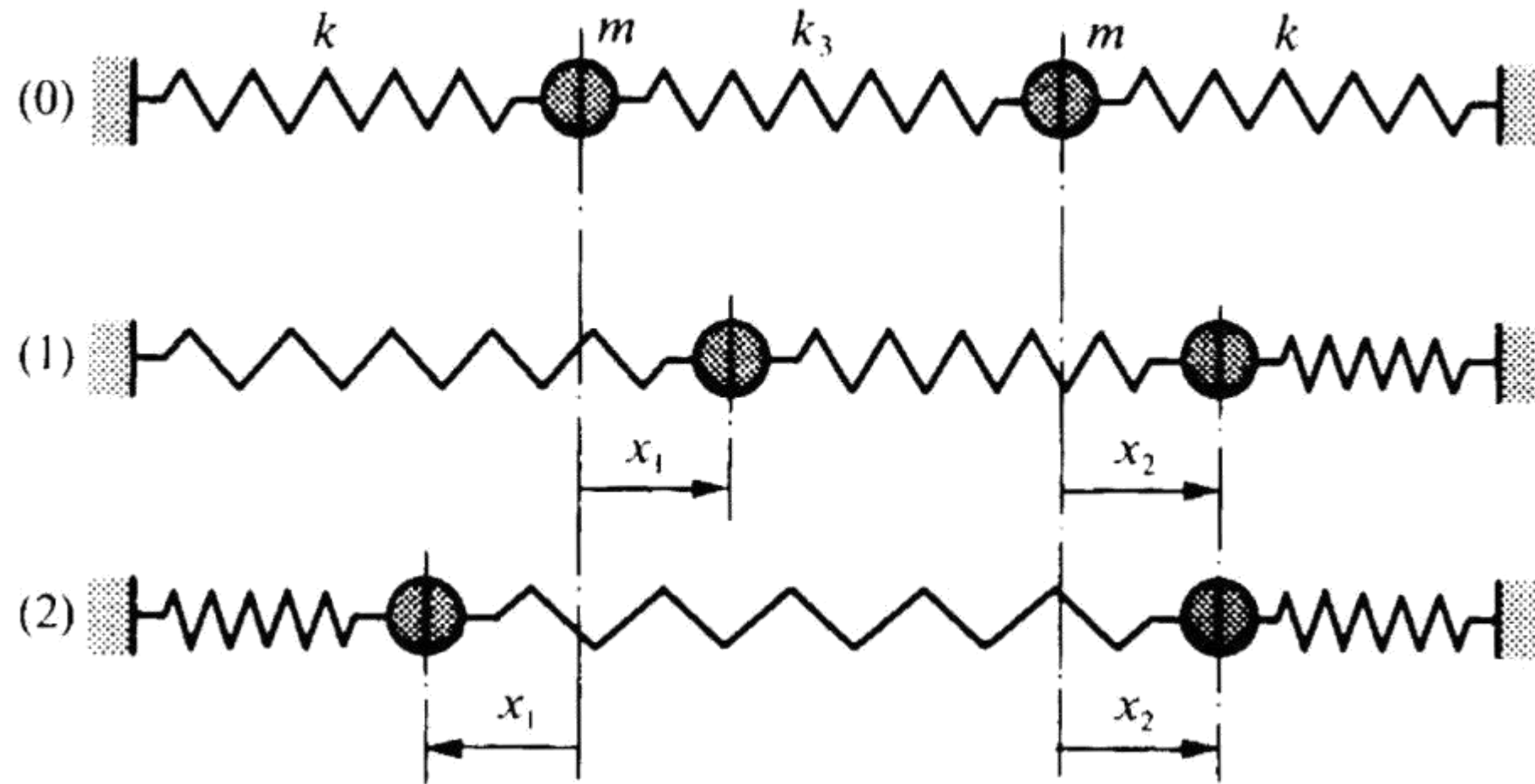
Premier mode du système (oscillations en phase)

$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (8.22)$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \quad (8.23)$$

EPFL Systèmes symétriques



Premier mode du système (oscillations en phase)

$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (8.22)$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \quad (8.23)$$

